LOS MODELOS CAPM Y ARCH-M OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES BETA PARA UNA MUESTRA DE 33 ACCIONES QUE COTIZAN EN LA BOLSA MEXICANA DE VALORES

María de la Paz Guzmán Plata*

Resumen

Con el fin de calcular el coeficiente beta como medida de sensibilidad de una acción en relación con el rendimiento de mercado de algunos valores que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, este artículo se ha dividido en dos secciones. En la sección I, se realiza una revisión teórica del modelo CAPM y de la línea característica del mercado de valores, modelos que generalmente se utilizan para el cálculo del coeficiente beta. Además, se incorporan modelos más recientes sobre series de tiempo que analizan la volatilidad condicional de las variables financieras y la incluyen como un regresor en la ecuación de la línea característica del mercado de valores para estimar el coeficiente beta. En la sección II se presenta la metodología seguida para el análisis empírico y los resultados obtenidos después de aplicar el CAPM y el modelo ARCH-M para una muestra de 33 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores; en la parte final se presentan las conclusiones.

Abstract

In order to estimate the beta coefficient/constant/ratio as a measure of sensibility of a given share in relation to the market yield of certain shares that are quoted in the Mexican Stock Exchange, this article is divided in two sections. The first includes a theoretical review of the CAPM model and of the stock market's characteristic tendency, models which are generally used to estimate the beta coefficient. In addition, more recent models of time series that analyze the conditional volatility of financial variables are incorporated, including them as a regressor in the characteristic tendency of the stock market to calculate the beta coefficient. Section II presents the methodology used in the empirical analysis and the results that were obtained after applying the CAPM and ARCH-M model on a sample of 33 shares that are quoted on the Mexican Stock Exchange; conclusions are stated in the final part.

* Profesora-investigadora del departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco.

Introducción

La teoría moderna de la toma de decisiones en incertidumbre introduce un marco conceptual génerico para medir el riesgo y el rendimiento de un activo que se mantiene como parte de una cartera y en condiciones de equilibrio de mercado. Este marco conceptual se denomina modelo de fijación de los precios de los activos de capital o CAPM (del inglés *Capital Asset Pricing Model*). Para este modelo el riesgo de una acción se divide en riesgo diversificable o riesgo específico de una compañía y el riesgo no diversificable o de mercado. Este último riesgo es el más importante para el CAPM y está medido por su coeficiente beta. Este coeficiente relaciona el exceso de rendimiento de la acción respecto de la tasa libre de riesgo y el exceso de rendimiento de mercado respecto a la tasa libre de riesgo.

Tradicionalmente, el coeficiente beta se obtiene por medio de una regresión lineal de dos variables según el supuesto de que el rendimiento en exceso de la acción, analizada como una serie de tiempo, tiene varianza condicional homoscedástica. Aunque el modelo CAPM y otros modelos que miden el riesgo de un activo han recibido severas críticas, en los años recientes podemos encontrar una clase de modelos, pertenecientes a la teoría de series de tiempo, que tratan de superar las ineficiencias estructurales de los modelos financieros. Esta clase de modelos son los llamados modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, GARCH y ARCH-M). El modelo ARCH y el modelo GARCH, como antecedentes del modelo ARCH-M, estudian la varianza condicional variable en el tiempo a partir de relaciones de variables rezagadas. El modelo ARCH expresa la varianza condicional en función lineal del cuadrado de las innovaciones rezagadas, y el modelo GARCH determina la varianza condicional en función de las innovaciones y de la varianza retrasada varios periodos. Una extensión del modelo ARCH y del modelo GARCH es el modelo ARCH-M, el cual se aplica principalmente en la medición del riesgo y el rendimiento esperado de un activo riesgoso. Este modelo hace depender a la media condicional de la varianza condicional variable. El método que utiliza el modelo ARCH-M para estimar el precio al riesgo variable es introducir la varianza condicional de las series de tiempo financieras como un regresor del rendimiento esperado de un activo riesgoso. Este método resuelve las limitaciones estructurales de los modelos financieros.

Con el fin de estimar el coeficiente beta mediante el modelo CAPM y con las aportaciones teóricas del modelo ARCH-M para una muestra de las 33 acciones más bursátiles en los años 1995, 1996 y el primer trimestre de 1997 que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores, esta investigación se ha dividido en dos secciones: en la I se realiza una revisión teórica del modelo CAPM, el modelo ARCH, el GARCH y el ARCH-M; en la II se presenta la muestra que se utilizó y los resultados del coeficiente beta obtenidos de manera tradicional y estimados al tomar en cuenta la volatilidad de las series. En la parte final de la investigación se presentan las conclusiones.

I. Los modelos

1. *El modelo CAPM*

a) *Los supuestos*

Dentro de las teorías financieras se han desarrollado modelos para relacionar el rendimiento de los valores y su riesgo. Una de las teorías más empleadas en la actualidad, que considera rendimiento y riesgo, es el modelo de fijación de precios de los activos de capital (CAPM).[1] Este modelo se desarrolla

1 El modelo CAPM, como otros modelos que miden el rendimiento esperado y el riesgo de un activo, han sido severamente criticados en una serie de artículos, los cuales encuentran inadecuada la estructura de estos modelos para estimar y predecir el precio al riesgo. Algunas de estas críticas se basan en que la varianza de largo plazo se supone constante. Otras críticas se sustentan en pruebas de regresión, las cuales muestran que las predicciones sobre la tasa del premio al riesgo medido por medio de las variables que se utilizan como explicativas son ineficientes. Existen críticas más fuertes que cuestionan la lógica empírica de los modelos escritos por Markowitz y Bill Sharpe, dentro de los cuales se encuentra el modelo CAPM. Un artículo que resume la

en un mundo hipotético donde se hacen los siguientes supuestos acerca de los inversionistas y del conjunto de las oportunidades de cartera:

1. Los inversionistas son individuos que tienen aversión al riesgo y buscan maximizar la utilidad esperada de su riqueza al final del periodo.
2. Los inversionistas son tomadores de precios y poseen expectativas homogéneas acerca de los rendimientos de los activos, los cuales tienen una distribución normal conjunta.
3. Existe un activo libre de riesgo tal que los inversionistas pueden pedir en préstamo o prestar montos ilimitados a la tasa libre de riesgo.
4. Las cantidades de todos los activos son negociables y perfectamente divisibles.
5. Los mercados de activos están libres de fricciones; la información no tiene costo alguno y está al alcance de todos los inversionistas.
6. No existen imperfecciones en el mercado (como impuestos, leyes, etcétera).

Estos supuestos muestran que el CAPM se basa en los postulados de la teoría microeconómica, endonde el consumidor (el inversionista con aversión al riesgo) elige entre curvas de indiferencia que le proporcionan la misma utilidad entre el riesgo y el rendimiento. Esta elección entre el riesgo y el rendimiento lleva al inversionista, por un lado, a la formación de carteras y a la búsqueda de portafolios que incluyan, además de los activos riesgosos, valores cuya tasa es libre de riesgo, y por otro lado a enfrentarse a un mercado de fondos prestables que debe estar en equilibrio en cada momento del tiempo. Adicionalmente, como todo consumidor racional, el inversionista adverso al riesgo buscará máximizar el rendimiento esperado sobre sus activos y minimizar el riesgo. Esta conducta de los inversionistas hace que exista un conjunto de portafolios únicos que maximizan el rendimiento esperado de un activo y minimizan el riesgo; a esta serie de portafolios se le llama comúnmente portafolios eficientes.

b) *La ecuación del CAPM*

Según los supuestos anteriores, el modelo CAPM requiere de la existencia del equilibrio en el mercado y de la presencia de portafolios eficientes. Se sabe que si existe equilibrio, los precios de todos los activos deben ajustarse hasta que todos sean sostenidos por los inversionistas, es decir, los precios deben establecerse de modo que la oferta de todos los activos sea igual a la demanda por sostenerlos. En equilibrio, entonces, no debe haber exceso de demanda y oferta de activos. La ecuación que resume el equilibrio de mercado y la existencia de portafolios eficientes es:[2]

$$(R_i) = R_f + \left[E(R_m) - R_f\right] \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} .$$

Esta ecuación es la expresión del modelo de fijación de los precios de los activos de capital, la cual nos dice que la tasa de rendimiento esperada sobre un activo es igual a la tasa libre de riesgo(R_f), más una tasa de premio por el riesgo:

$$\left[E(R_m) - R_f\right] \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} .$$

Este premio al riesgo es el precio al riesgo, $E(R_m) - R_f$, multiplicado por la cantidad de riesgo, σ_{im} / σ_m^2. La cantidad de riesgo es llamada beta, β_i, que es la relación entre la covarianza del rendimiento de la acción y el rendimiento del portafolio de mercado con la varianza del rendimiento del portafolio de mercado.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} .$$

mayoría de las críticas hechas a estos modelos es "Beta is dead! Long Live Beta", de Jason Mac Queen, publicado en *The Revolution in Corporate Finance*, de Joel M. Stern y Donald H. (1972).

2 Para la derivación formal de esta ecuación véase "Una aplicación del modelo CAPM para algunas acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores", *Análisis Económico*, núm. 27, UAM-Azcapotzalco, México, 1995.

Esta beta mide el riesgo sistemático o no diversificable que surge de aspectos como inflación, guerras, recesiones y altas tasas de interés, que son factores que afectan a todas las empresas en forma conjunta. Puesto que todas las empresas se ven afectadas simultáneamente por estos factores, este tipo de riesgo no puede ser eliminado por diversificación.[3]

Desde el punto de vista estadístico, los valores de beta se calculan por medio de la siguiente regresión lineal, también conocida como línea característica del mercado de valores:

$$R_{it} = \alpha + \beta_i R_{m,t} + e_{it}$$

donde:

R_{it} = tasa de rendimiento del activo *i* en el periodo *t*
α = intercepto de la regresión o rendimiento autónomo
β_i = coeficiente que mide el grado de riesgo del activo con respecto al rendimiento de mercado
$R_{m,t}$ = rendimiento del mercado durante el periodo *t*
e_{it} = término de error aleatorio de la regresión en el periodo *t*.

Se requiere que la regresión cumpla con los supuestos de mínimos cuadrados ordinarios[4] para que beta sea el mejor estimador insesgado.

La beta se puede interpretar como el grado de respuesta de la variabilidad de los rendimientos de la acción a la variabilidad de los rendimientos del mercado. Si $\beta_i > 1$, entonces tenemos que las variaciones en los rendimientos del valor *i* serán mayores a las variaciones del rendimiento del mercado. Por lo contrario, si $\beta_i < 1$, entonces el valor *i* será menos riesgoso que el rendimiento del mercado. Si $\beta_i = 1$, el rendimiento del valor *i* variará en la misma proporción que la variación del rendimiento de mercado.[5]

Una vez que se obtiene β_i, ésta se utiliza para determinar el rendimiento requerido de la acción por medio de la ecuación del CAPM, que empíricamente se calcula como:

$$R_i = R_f + (R_{mt} - R_{rt})\beta_i + e_{it}$$

donde en primer lugar se ha agregado el tiempo en las variables; en segundo lugar, se ha eliminado la variable de expectativas, *E*, porque se usan datos *ex post* para probar el CAPM *ex ante* y el tercer punto importante a destacar es que se añade un término de error e_{it}.

Para probar el modelo CAPM se ha utilizado la siguiente expresión:

$$R_{it} - R_{ft} = a + \beta_i (R_{mt} - R_{ft}) + e_{it} \qquad (1)$$

o bien,

---

3 El riesgo diversificable o riesgo no sistemático surge por aspectos como pleitos, huelgas, programas de comercialización con o sin éxito y otros eventos que son únicos para una empresa en particular. Puesto que estos eventos son esencialmente individuales, sus efectos sobre una cartera pueden ser eliminados mediante la diversificación.

4 El método de mínimos cuadrados ordinarios, para la estimación de un modelo lineal de dos variables, se basa en los siguientes supuestos:

Supuesto 1. El valor medio de los errores estocásticos es igual a cero: $E(u_i / X_i) = 0$.

Supuesto 2. No existe autocorrelación entre los errores:

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, u_j) &= E\left[\left(u_i - E(u_i)\right)\left(u_j - E(u_j)\right)\right] \\ &= E(u_i, u_j) \\ &= 0 \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Supuesto 3. Homoscedasticidad o igual varianza entre los errores:

$$\begin{aligned} \text{var}(u_i / X_i) &= E(u_i - E(u_i))^2 \\ &= E(u_i^2) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Supuesto 4. Covarianza cero entre los errores y la variable X_i:

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, X_i) &= E\left[\left(u_i - E(u_i)\right)\left(X_i - E(X_i)\right)\right] \\ &= E(u_i X_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supuesto 5. El modelo de regresión está correctamente especificado.

5 Frecuentemente a las acciones cuya $\beta_i > 1$ se les suele llamar acciones riesgosas; para aquellas que presentan una $\beta_i < 1$, se les conoce como acciones defensivas, y si $\beta_i = 1$ las acciones son conocidas como de riesgo promedio. Además, existe una clase de acciones cuyo coeficiente β_i es negativo. A este tipo de acciones se les denomina superdefensivas.

$$R_{it} - R_{ft} = \beta_i (R_{mt} - R_{ft}) + e_{it} . \qquad (2)$$

Como la tasa libre de riesgo se restó de ambos lados de las ecuaciones, la interpretación del término $(R_{it} - R_{ft})$ sería el exceso del rendimiento del *i*-ésimo título o acción. Así, según el CAPM, el exceso de rendimiento de la acción debe ser igual al exceso de rendimiento del mercado multiplicado por su beta, ecuación (2).

2. *Los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, GARCH y ARCH-M)*

En la sección anterior se anotó que para las estimaciones empíricas de la línea característica como medida del riesgo y del modelo CAPM se ha utilizado el modelo de regresión lineal de dos variables:

$$R_{it} = \alpha + \beta R_{mt} + e_{it}$$

$$R_{it} - R_{ft} = \beta (R_{mt} - R_{ft}) + e_{it} .$$

Estas ecuaciones, que forman las expresiones empíricas del CAPM para la valuación del riesgo y del rendimiento de un activo, tienen limitaciones en su estructura porque suponen que la varianza es constante en el tiempo. Aunque son modelos econométricos, las variables que intervienen en la determinación del precio al riesgo no son analizadas en el marco del estudio de las series de tiempo. Afortunadamente, en los años recientes el desarrollo en los modelos de series de tiempo ha contribuido a disminuir las limitaciones estructurales de los modelos financieros al incorporar la estimación de la varianza condicional variable en las series. Esta clase de modelos son los llamados de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH,[6] GARCH[7] y ARCH-M).[8]

El modelo ARCH y el modelo GARCH estudian la varianza condicional variable mediante relaciones de variables conocidas de periodos rezagados. El modelo ARCH expresa la varianza condicional como función lineal del cuadrado de las innovaciones rezagadas. El modelo GARCH determina la varianza condicional por medio del cuadrado de las innovaciones y de la varianza retrasada varios periodos. El modelo ARCH-M es una extensión del modelo ARCH y del modelo GARCH, pero principalmente se utiliza en la valuación del precio del activo. Este modelo supone que el grado de incertidumbre en el rendimiento de un activo varía en el tiempo, y por tanto la compensación que requieren los inversionistas con aversión al riesgo para invertir también debe variar. La característica principal del modelo ARCH-M es que hace depender la media condicional de la varianza condicional. En este sentido, la varianza condicional afecta al rendimiento esperado del portafolio. Además, la varianza condicional se utiliza como un regresor en aquellos modelos que estudian el riesgo.

a) *El modelo ARCH*

Engle presenta una nueva clase de modelos capaces de explicar periodos de alta volatilidad con aquellos de relativa volatilidad. La metodología de Engle es mostrar primero que la varianza condicional de los errores de una serie puede variar mientras que la varianza incondicional es una constante y, en segundo lugar, cómo se puede modelar la varianza condicional heteroscedástica por medio de un proceso AR.[9]

6 Este tipo de modelos fue desarrollado por R. F. Engle (1982, pp. 987-1007).

7 Los modelos GARCH fueron desarrollados por Tim Bollerslev (1986, pp. 307-327).

8 Robert F. Engle, David Lilien, y Russell Robins aplicaron en 1987 los modelos ARCH al estudio de los mercados financieros.

9 Un proceso *AR* es aquel que describe una variable por medio de sus observaciones pasadas.

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_r X_{t-r} + \varepsilon_t$$

donde: ε_t es un proceso aleatorio, X_t es la variable explicada por sus valores rezagados. En términos del operador de retraso, el proceso *AR* puede escribirse como:

$$X_t = (\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \ldots + \alpha_r B^r) X_t + \varepsilon_t$$

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots - \alpha_r B^r\right) X_t = \varepsilon_t$$

Supóngase que se estima un modelo *AR*(1)

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y deseamos estimar la esperanza condicional de y_{t+1}, donde:

$$y_{t+1} = a_0 + a_1 y_t + \varepsilon_{t-1}.$$

$$E(y_{t+1}) = a_0 + a_1 y_t \text{ dado que } E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

si se usa la varianza condicional para estimar y_{t+1}, el valor esperado de los errores es:

$$E\left[\left(y_{t+1} - a_0 - a_1 y_t\right)^2\right] = \sigma^2$$

$$E\left[\left(\varepsilon_{t+1}\right)\right] = \sigma^2.$$

Si se utiliza la varianza incondicional, el valor esperado de esta varianza es una media de largo plazo de la secuencia de y_t que es igual a $a_0/1-a_1$. La estimación de la varianza incondicional del error es:

$$E = \left[\left(\frac{y_{t+1} - a_0}{(1-a_1)}\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(E_{t+1} + a_1\varepsilon_t + a_1^2\varepsilon_{t+1} + a_1^3\varepsilon_{t-2} + \ldots\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{(1-a_1)^2},$$

donde

$$X_t = \frac{1}{\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots - \alpha_r B^r\right)}\varepsilon_t$$

$$= \frac{1}{(1-\pi_1 B)(1-\pi_2 B)\ldots(1-\pi_r B)}\varepsilon_t,$$

donde $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_r$ son las raíces características de grado *r*.

$$\frac{1}{(1-a_1)} > 1.$$

Como el valor esperado de la varianza condicional es σ^2 y el valor esperado de la varianza incondicional es

$$\frac{\sigma^2}{(1-a_1)^2},$$

se deduce que la varianza incondicional es mayor que la varianza condicional, por lo cual esta última se prefiere para el análisis.

Por otra parte, si la varianza de los errores estocásticos no es constante, se puede estimar una tendencia de los movimientos de la varianza usando un modelo *AR*. Por ejemplo, $\hat{\varepsilon}_t$ denota la estimación de los residuales del modelo:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

así que la varianza condicional de y_{t+1} es:

$$Var\left(y_{t+1} \mid y_t\right) = E\left[\left(y_{t+1} - a_0 - a_1 y_t\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\varepsilon_{t+1}\right)^2\right].$$

Pero sabemos que $E\left[\left(\varepsilon_{t+1}\right)^2\right] = \sigma^2$. Ahora supongamos que la varianza condicional no es constante. Una simple estrategia para hacer que la varianza condicional no sea constante es usar un modelo *AR*(*q*), utilizando el cuadrado de los residuales estimados:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \ldots \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + v_t,$$

donde v_t es un ruido blanco.

Si los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$ son iguales a cero, la varianza estimada es constante; si son diferentes de cero la varianza condicional de los errores no será constante.

Como la especificación lineal de la varianza condicional heteroscedástica no es muy conveniente, Engle

propone un modelo de heteroscedasticidad condicional multiplicativa[10] ARCH(1), dado de la siguiente forma:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2}$$

donde *vt* = ruido blanco con $\sigma_v^2 = 1$, y ε_{t-1} es independiente de *vt*, α_0 y α_1 son constantes que toman los valores $\alpha_0 > 0$ y $0 < \alpha_1 < 1$. Las condiciones sobre los parámetros α_0 y α_1 garantizan la estacionalidad del proceso *AR*(1) en la varianza condicional.

Siguiendo la ecuación anterior, el modelo de heteroscedasticidad condicional multiplicativa ARCH (*q*) es:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2}$$

donde *vt* = ruido blanco con $\sigma_v^2 = 1$. Las condiciones sobre los parámetros que garantizan la estabilidad del modelo ARCH (*q*) son ahora

$$\alpha_0 > 0, \text{ y } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{3\ldots} + \alpha_{q<1}.$$

b) *El modelo GARCH*

Bollerslev hizo una extensión del trabajo original de Engle y desarrolló una técnica aplicando un proceso ARMA[11] a la varianza condicional de los errores.

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\sigma_t^2}$$

donde $\sigma_v^2 = 1$ y para un modelo GARCH (1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2.$$

Al igual que en el modelo ARCH, v_t es un proceso de ruido blanco que es independiente de las realizaciones pasadas de ε_{t-i}. Las condiciones sobre los parámetros que garantizan la estabilidad del modelo son:

$$\alpha_0 > 0 \qquad 0 < \alpha_1 < 1 \qquad -1 < \beta_1 < 1$$

El modelo GARCH (*p*, *q*) es:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2$$

o bien:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \ldots$$

$$+ \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-2}^2 + \ldots + \beta_p\sigma_{t-p}^2.$$

Las condiciones sobre los parámetros son ahora:

$$\alpha_0 > 0 \qquad \alpha_i \geq 0 \qquad \beta_i \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p < 1$$

La varianza condicional ε_t también puede escribirse como $E_{t-1}\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2$, que al sustituirse en la generalización del modelo GARCH (*p*, *q*) nos queda:

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_1\varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\beta\sigma^2{}_{t-i}.$$

La ecuación anterior muestra con mayor claridad un proceso ARMA (*p*, *q*) en la generación de la varianza condicional. Esta generalidad del modelo ARCH (*q*) llamado GARCH (*p*, *q*) tiene un componente autorregresivo y de media móvil en la varianza heteroscedástica. Sin embargo, la ventaja del modelo GARCH sobre el modelo

10 Engle plantea el modelo de heteroscedasticidad condicional multiplicativa en términos de y_t, y establece que: $y_t = \varepsilon_t h_t^{1/2}$, donde $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$; $\text{cov}(\varepsilon_t) = 1$, modelo que puede ser generalizado como: $h_t = h\,(y_{t-1}, y_{t-2} \ldots y_{t-p}, \alpha)$, donde *p* es el orden del proceso ARCH y α es un vector de parámetros desconocidos.

11 Un modelo ARMA (*p*, *q*) se define como: $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots \beta_q\varepsilon_{t-q}$, donde ε_t es un proceso aleatorio con media 0 y varianza σ^2. En términos del operaror de rezago *B*, es posible describir este modelo como: $\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$, donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son polinomios de orden *p* y *q* respectivamente, y se definen como:

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots. - \alpha_p B^p$$

$$\theta(L) = 1 + \beta_1 B + \beta_2 B + \ldots + \beta_q B^q.$$

ARCH es que el modelo GARCH podría tener más parsimonia, representación que es fácil identificar y estimar.

c) *El modelo ARCH-M*

Engle, Lilien y Robins extienden el modelo ARCH básico haciendo que la media dependa de los movimientos de la varianza. Esta clase de modelos, llamados ARCH-M, estudian particularmente los mercados de activos. La idea fundamental de estos mercados es que los inversionistas adversos al riesgo requieren una compensación para retener un activo riesgoso. Dado que el riesgo de un activo puede ser medido por la varianza del rendimiento, el premio al riesgo puede incrementarse en función de la varianza condicional del rendimiento.

Engle, Lilien y Robins expresan esta idea, formulando el rendimiento en exceso del activo riesgoso que se desea retener, como:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

donde:

- y_t = rendimiento en exceso del activo que se desea retener
- μ_t = el premio al riesgo necesario para inducir al inversionista a retener el activo
- ε_t = choque no estimable del rendimiento en exceso de los activos.

Esta ecuación explica que el exceso de rendimiento para retener el activo debe ser igual al premio al riesgo

$$E_{t-1} y_t = \mu_t .$$

Engle, Lilien y Robins asumen que el premio al riesgo se incrementa en función de la varianza condicional de ε_t, es decir, el incremento de la varianza condicional de los rendimientos aumenta la compensación necesaria para inducir a los inversionistas a retener el activo a largo plazo. Matemáticamente, si σ_t^2, es la varianza condicional de ε_t, el premio al riesgo puede ser expresado como:

$$\mu_t = \beta + \delta\sigma_t^2 \qquad \delta > 0$$

donde σ_t^2 es el proceso ARCH(q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 .$$

Una generalización del modelo ARCH-M(q) es el modelo ARCH-M (p, q), que considera a la varianza condicional como un modelo GARCH y está dado como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 .$$

Estas ecuaciones constituyen la idea básica del modelo ARCH-M. De las dos primeras ecuaciones observamos que la media de y_t depende de la varianza condicional σ_t^2. De las dos últimas ecuaciones, notamos que la varianza condicional es un proceso ARCH(q) y ARCH(p, q), respectivamente. Si la varianza condicional es constante $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_q = 0$ y el modelo ARCH-M degenera dentro del caso tradicional del premio al riesgo constante.

Lo importante del modelo ARCH-M es que incorpora la varianza condicional no constante al exceso de rendimiento necesario para retener el activo a largo plazo. En el caso de la ecuación empírica del CAPM

$$R_{it} - R_f = \beta_i (R_{mt} - R_f) + \varepsilon_t$$

el modelo ARCH-M se introduce en la variable exceso de rendimiento del mercado de la siguiente manera:

$$R_{mt} - R_f = \varphi + \sigma_t^2$$

donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 ,$$

o bien, donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 .$$

CUADRO 1

Emisora	*Industria*	*Índice de bursatilidad* [a]			*Influencia en el índice (Porcentaje)*		
		Diciembre 1995	*Diciembre 1996*	*Marzo 1997*	*Diciembre 1995*	*Diciembre 1996*	*Marzo 1997*
Ábaco A	Financiera	5.61	5.06	5.38	-	-	-
Ábaco B	Financiera	5.56	n.d.	n.d.	-	-	-
Ábaco C	Financiera	n.d.	4.65	4.81	-	-	-
Ahmsa	Siderúrgica	7.96	8.52	8.75	1.83	1.45	1.35
Alfa	Varios	8.41	9.22	9.15	4.73	5	5.51
Apasco	Cementera	7.60	8.46	8.80	2.42	3.41	3.07
Autlán B	Minera	5.90	7.10	7.58	0.24	-	-
Bimbo	Alimentos	6.50	6.85	7.07	-	-	-
Banacci A	Financiera	6.27	6.12	6.12	-	-	-
Banacci B	Financiera	8.43	8.97	9.09	2.57	2.73	2.69
Banacci L	Financiera	7.34	7.56	7.56	-	-	-
Camesa B	Varios	6.06	6.79	7.61	-	-	-
Celanes B	Química	5.98	6.53	6.53	-	-	-
Cemex A	Cementera	8.2	8.17	8.16	5.18	3.97	3.71
Cemex B	Cementera	9.46	9.25	9.33	3.35	3.06	2.86
Cemex O	Cementera	8.83	9.12	9.20	1.31	2.34	2.18
Cifra A	Comercio	7.89	6.88	7.27	-	-	-
Cifra B	Comercio	7.99	8.86	9.17	2.59	2.57	2.67
Cifra C	Comercio	8.67	8.94	9.25	1.72	1.74	1.82
Comerci	Comercio	6.96	5.15	8.65	-	0.46	0.34
Cydsasa	Varios	7.89	7.16	7.55	0.62	-	-
Dina	Equipo de transporte	5.34	6.47	6.84	-	-	-
Elektra	Comercio	7.39	8.11	8.23	-	0.42	0.46
Empaq B	Celulosa y papel	5.29	6.89	7.82	-	-	-
Emvasa B	Alimentos	5.77	5.70	6.42	-	-	-
Femsa	Alimentos	8.61	8.90	.9.21	2.58	3.32	3.91
Gcarso	Varios	8.83	9.12	9.20	10.47	8.66	8.69
Bital L	Financiera	5.01	5.02	5.53	-	-	-
Gruma	Alimentos	6.85	7.79	7.99	-	-	-
Maseca	Alimentos	8.57	8.69	9.14	0.54	0.94	0.70
Ttolmex	Cementera	4.90	4.83	5.05	1.40	-	-
Invex	Financiera	4.28	3.73	4.21	-	-	-
Telmex L	Comunicaciones	9.92	9.88	9.97	24.70	19.17	19.41

a Bursatilidad alta $8.19 \leq X \leq 10.00$.
Bursatilidad media $6.90 \leq X \leq 8.19$.
Bursatilidad baja $4.90 \leq X \leq 6.90$.
n.d.: No disponible.

II. Evidencia empírica

1. *La muestra*

En esta investigación se considera una muestra de 33 acciones que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valoreslos años 1995, 1996 y marzo de 1997. Las acciones se eligieron tomando en cuenta su facilidad para venderse y comprarse diariamente, es decir, se eligieron las que tienen un índice de bursatilidad mayor y que permanecieron bimestralmente como determinantes en el índice de precios y cotizaciones en el periodo que comprende el estudio.

Se tomaron 563 observaciones diarias del precio al cierre de cada acción correspondientes a los años 1995, 1996 y marzo de 1997. En caso de que la acción no haya cotizado en una fecha determinada, se consideró el precio del día inmediatamente anterior.

Como la variable R_m (rendimiento del mercado) se eligió el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores por ser el índice representativo del mercado de capitales mexicano.

2. *Aplicación de los modelos CAPM y ARCH-M*

a) *Obtención del riesgo no diversificable*

Como se anotó en la sección anterior, el modelo de fijación de los precios de los activos de capital explica el comportamiento de los rendimientos requeridos de las acciones considerando su grado de riesgo no diversificable o de mercado. Este riesgo no diversificable medido por la variable β se obtuvo por una simple regresión lineal de dos variables del rendimiento de cada una de las acciones contra el rendimiento de mercado.

$$R_{it} = \alpha + \beta_i R_{mt} + e_{it}$$

donde:

R_i = rendimiento de la acción i
α = ordenada al origen
β_i = coeficiente beta (medida del riesgo no diversificable)
R_m = rendimiento de mercado
e_{it} = residuo.

Para encontrar el coeficiente β según el modelo ARCH-M se procedió de la siguiente manera:

1. Se hizo un análisis del correlograma de cada serie para determinar el grado del modelo ARMA correspondiente a los rendimientos de la acción.
2. Para observar la volatilidad de la serie, se analizó la suma de los errores al cuadrado de las regresiones siguientes:

   $R_{it} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} R_{it-j} + \sum_{j=0}^{q} \varepsilon_{it-j}$ si la serie es generada por un proceso ARMA(p, q)

   $R_{it} = \alpha_0$ si la serie es estacionaria en covarianza[12] sin necesidad de modelarla como un procesoARMA. Además, con esos errores al cuadrado se llevó a cabo la prueba de efectos ARCH, que consiste en medir la significancia estadística de los coeficientes de los errores al cuadrado contra sus rezagos.

   $e_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{it-1}^2 + \alpha_2 e_{it-2}^2 + \alpha_3 e_{it-3}^2 + \ldots + \alpha_q e_{it-q}^2 + v_t$

   con la hipótesis nula $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_q = 0$.

   Si se acepta la hipótesis nula no hay efectos ARCH, es decir, la serie tiene varianza condicional constante. Si no se acepta la hipótesis nula hay efectos ARCH o bien la serie es volátil.
3. Cuando la serie no presenta efectos ARCH entonces prevalece el coeficiente β que se obtuvo con la ecuación de la línea característica del mercado de valores.
4. Si la serie muestra efectos ARCH se modelan los errores o la varianza condicional con base en el modelo ARCH o GARCH y se obtiene la varianza o desviación estándar GARCH.
5. La desviación estándar GARCH se incorpora como

12 Dentro de la teoría de las series de tiempo, un proceso estocástico lineal tiene media constante y varianza constante, y para que sea estacionario en covarianza la sumatoria de sus coeficientes debe converger al equilibrio.

CUADRO 2

COEFICIENTE β

Emisora	*Coeficiente β*	*Coeficiente β con efectos*			
		ARCH [a]		*GARCH* [a]	
Ábaco A	-0.153	-		-	
Ábaco B	-0.153	-		-	
Ábaco L	-0.035	-		-	
Ahmsa	0.510	-		-	
Alfa	0.641	-		-	
Apasco	1.097	-		1.084	(1, 1)
Autlán B	-1.293	-		-	
Bimbo	0.504	-		0.505	(1, 1)
Banacci A	0.510	-		0.509	(1, 1)
Banacci B	1.091	-		1.093	(1, 1)
Banacci L	0.983	-		1.983	(1, 1)
Camesa B	0.201	-		-	
Celanes B	0.257	-		-	
Cemex A	1.338	1.336	(1)	-	
Cemex B	1.413	1.418	(1)	-	
Cemex O	1.418	-		1.417	(1, 1)
Cifra A	0.678	-		0.676	(1, 1)
Cifra B	1.113	-		1.111	(1, 1)
Cifra C	1.080	-		1.079	(1, 1)
Comerci	-0.078	-		-	
Cydsasa	0.591	0.563	(1)	-	
Dina	1.154	-		1.510	(1, 1)
Elektra	0.605	0.610	(1)	-	
Empaq B	0.111	-		-	
Emvasa B	0.197	0.197	(1)	-	
Fensa	0.915	0.922	(1)	-	
Gcarso	1.165	-		-	
Bital L	0.003	-		-	
Gruma	0.315	-		-	
Maseca	0.959	0.957	(1)	-	
Ttolmex	0.867	-		0.872	(1, 1)
Invex	1.069	1.069	(1)	-	
Telmex	0.553	0.562	(1)	-	

a Grado del modelo ARCH o GARCH.

variable explicativa a la ecuación característica del mercado de valores.

$$R_{IT} = \alpha_0 + \beta_i R_{mt} + \delta_i S_i + e_{it}$$

donde:

δ_i = coeficiente de la desviación estándar GARCH
S_{it} = desviación estándar GARCH

Los resultados del coeficiente β obtenidos por medio de la ecuación característica y con base en el modelo ARCH-M se muestran en el cuadro 2.

3. *Análisis de resultados*

a) *El coeficiente β obtenido del modo tradicional*

Nueve de las 33 acciones consideradas en la muestra observan un coeficiente de sensibilidad mayor que uno. En este sentido, los rendimientos en exceso de Apasco, Banacci B, Cemex A, Cemex B, Cemex C, Cifra B, Cifra C, Dina y Gcarso varían de manera más que proporcional al rendimiento en exceso del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores y se constituyen, en el periodo en estudio, como acciones riesgosas.

Las acciones cuyo coeficiente de sensibilidad indica que se pueden considerar de riesgo promedio, aunque el valor de su coeficiente no es la unidad, pero muy cercana a este número son Fensa y Maseca con un coeficiente beta de 0.915 y 0.959, respectivamente.

Las acciones que muestran un riesgo sistemático inferior que el del mercado son Ahmsa, Alfa, Bimbo, Banacci A, Camesa B, Celanes B, Cifra A, Cydsasa, Elektra, Empaq B, Envasa B, Bital L, Gruma, Ttolmex B y Telmex L. Por tener estas acciones un coeficiente de sensibilidad menor que la unidad se les puede clasificar como acciones defensivas.

Destaca el coeficiente de sensibilidad obtenido por Ábaco A, Ábaco B, Ábaco L y Autlán B, ya que muestra un signo negativo. A este tipo de acciones cuyo coeficiente beta es negativo se les suele llamar superdefensivas.

b) *El coeficiente β con efectos ARCH y GARCH*

En realidad sólo 17 de las 33 acciones consideradas en la muestra reflejan que su varianza condicional no es constante de 1995 a marzo de 1997. Además, el coeficiente β no varía al estimarlo de la manera tradicional o considerando los efectos de volatilidad en la serie.

Conclusiones

De esta investigación se puede concluir que los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, GARCH y ARCH-M) son de gran utilidad para medir el grado de volatilidad en las variables. Estos modelos nos permiten modelar la varianza condicional variable de las series de tiempo por medio del soporte teórico de los modelos ARMA. Con los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresivaquedan superadas las limitaciones estructurales de los modelos que se utilizan para la valuación del riesgo de un activo, como por ejemplo el modelo de fijación de los precios de los activos de capital (CAPM) al incluir como un regresor, en la explicación de los rendimientos de un activo, a la varianza condicional variable.

En lo que respecta a la parte empírica, se puede concluir que en el periodo de 1995 a marzo 1997 la mayoría de las emisoras que forman la muestra presentaron una menor sensibilidad al riesgo que el experimentado por el mercado. Esto se explica por la relativa estabilidad del mercado de capitales durante estos dos años y después de la crisis financiera y económica que sufrió el país en diciembre de 1994. Además, destacan aquellas emisoras que presentan un coeficiente β negativo, resultado de una conducta precautoria en el mercado de capitales.

En relación con los coeficientes β obtenidos utilizando la ecuación de la línea característica, y aquellos que incorporan el efecto de una varianza condicional heteroscedástica, se observa que no varían considerablemente. Sin embargo, es importante co-

nocer y aplicar los estudios más recientes de las series de tiempo aplicadas al análisis de riesgo.

Por último es importante destacar que aproximadamente 50% de los rendimientos de las acciones que se manejaron como series de tiempo tienen varianza condicional constante.

Referencias bibliográficas

Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V., *Indicadores bursátiles,* 1995-1997.

——— , *Boletín bursátil diario*, 1995-1997.

Bollerslev, Tim (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, núm. 31, pp. 307-327.

Brealey A., Richard (1993), "Principios de finanzas corporativas", México, Mc Graw-Hill, segunda edición.

Enders, Walter (1995), *Applied Econometric Time Series*, John Wiley and Sons, Inc.

Engle, Robert F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica* 55, julio, pp. 987-1007.

——— , David Lilien y Russell Robins (1987), "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure, The ARCH-M Model", *Ecomometrica* 55, marzo, pp. 391-407.

Fama, E. F. (1971), "Risk Return and Equilibrium", *Journal of Political Economy*, 79, enero y febrero, pp. 30-55.

——— , y J. Mac Beth (1973), "Risk, Return and Equilibrium. Empirical Test", *Journal of Political Economy*, 81, mayo-junio, pp. 607-636.

Guzmán, María de la Paz (1995), "Una aplicación del modelo CAPM para algunas acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (1993-1995)", *Análisis Económico*, vol. XII, núm. 27, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.

Ludlow, J. W. (1987), "Modelos de volatilidad condicional variable", apuntes de trabajo, UAM-Azcapotzalco.

Stern, Joel M., y Donald H. Chew (1992), "The Revolution in Corporate Finance", editado en Estados Unidos.

Weston, Fred, y Thomas E. Copeland (1992), *Finanzas en administración*, México, Mc Graw-Hill, tercera edición.